

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
(МГСУ)**

Кафедра «Испытание сооружений»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО КУРСУ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Часть 2

**«ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ
В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ»**

для студентов факультета МиАС
(специальности 270101, 270113, 190205)

МОСКВА
2009

СОСТАВИТЕЛИ:

Проф., докт. тех. наук А.В. Коргин

В подготовке принимал участие:

Ассистент К.С. Борчев

Научный редактор

Проф., канд. тех. наук Ю.С. Кунин

Рецензент

Доцент, канд. тех. наук О.Л. Бандин
(Московский
гидромелиоративный институт)

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО КУРСУ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»**

Часть 2

**«ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ
В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ»**

для студентов факультета МиАС
(специальности 270101, 270113, 190205)

Редактор Н.И. Богдасарова
Технический редактор С.М. Сивоконева

Подписано в печать	Формат	Печать офсетная
И-15 Объём	Тираж	Заказ

Типография

III. Литература

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] / В. И. Феодосьев. - Изд. 14-е, испр. - М. : МГТУ, 2007. - 591 с. : ил.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов [Текст] / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; ред. А. В. Александров. - 5-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2007. - 560 с. : ил.
3. Варданян, Г. С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст] / Г. С. Варданян, Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. - М. : Изд-во АСВ, 1995. - 572 с. : ил.
4. Грес, П. В. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов [Текст] : учеб.пособие для техн.вузов / П. В. Грес. - Изд. 2-е, стер. - М.: Высш. шк., 2007. - 135 с.: ил.
5. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. - 2-е изд., перераб. и доп. - Киев : Наук.думка, 1988. - 734 с. : ил.

Определение внутренних усилий в стержневых системах

Внешние и внутренние силы

Внешние силы – результат взаимодействия конструкции и объектов (сил), расположенных вне ее границы (исключение – собственный вес)

Внешние силы могут быть заданы (внешняя нагрузка) или определены из уравнений статики, составленных для внешних сил (опорные реакции).

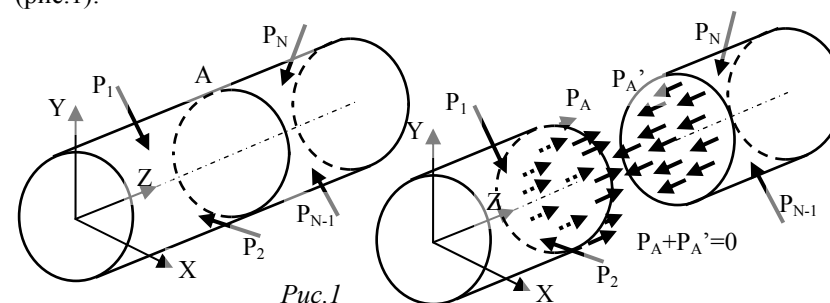
Внутренние силы (усилия) – результат взаимодействия частей конструкции внутри ее границы, вызванного действием внешних сил.

Внутренние силы не могут быть определены прямо, т.к. они находятся внутри границы конструкции, но если их представить в качестве внешних сил, то они также могут быть вычислены из уравнений статики.

Метод сечений.

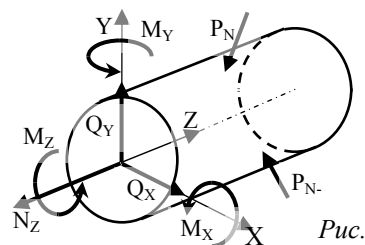
Метод сечений является способом определения внутренних сил, основанным на их мысленном переводе в разряд внешних сил.

Стержень находится в равновесии под действием системы внешних сил $P_1 \div P_N$. Для определения внутренних сил в сечении А разрежем мысленно стержень по сечению на 2 части и приложим к каждой из них внешние силы P_A и P_A' для сохранения равновесия (рис.1):



Поскольку части остаются в равновесии, то P_A и P_A' равны внутренним усилиям в сечении А, но в отличие от них, могут быть определены из уравнений равновесия, как внешние силы. Для этого можно рассматривать равновесие **любой из частей** (правой или левой), т.к. $P_A = -P_A'$.

Виды внутренних усилий.



Q_X – поперечная сила вдоль оси X
 Q_Y – поперечная сила вдоль оси Y
 N_Z – нормальная сила вдоль оси Z
 M_X – изгибающий момент отн. оси X
 M_Y – изгибающий момент отн. оси Y
 M_Z – крутящий момент отн. оси Z

Внутренние усилия
приложены к центральной оси

Уравнения равновесия для вычисления внутренних усилий

$$\begin{aligned}
 \sum X &= Q_X + \sum P_{X_i} = 0; & Q_X &= -\sum P_{X_i} \\
 \sum Y &= Q_Y + \sum P_{Y_i} = 0; & Q_Y &= -\sum P_{Y_i} \\
 \sum Z &= Q_Z + \sum P_{Z_i} = 0; & Q_Z &= -\sum P_{Z_i} \\
 \sum M(x) &= M_X + \sum M_X(P_i) = 0; & M_X &= -\sum M_X(P_i) \\
 \sum M(y) &= M_Y + \sum M_Y(P_i) = 0; & M_Y &= -\sum M_Y(P_i) \\
 \sum M(z) &= M_Z + \sum M_Z(P_i) = 0; & M_Z &= -\sum M_Z(P_i)
 \end{aligned}
 \quad (1)$$

Виды внешних нагрузок

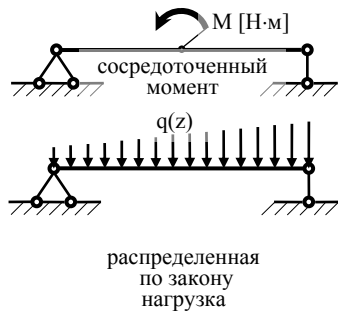
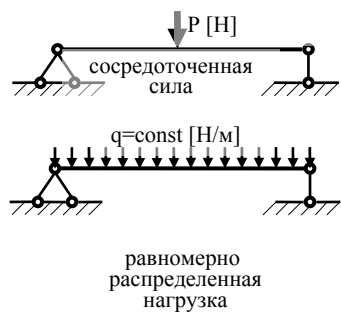


Рис. 3

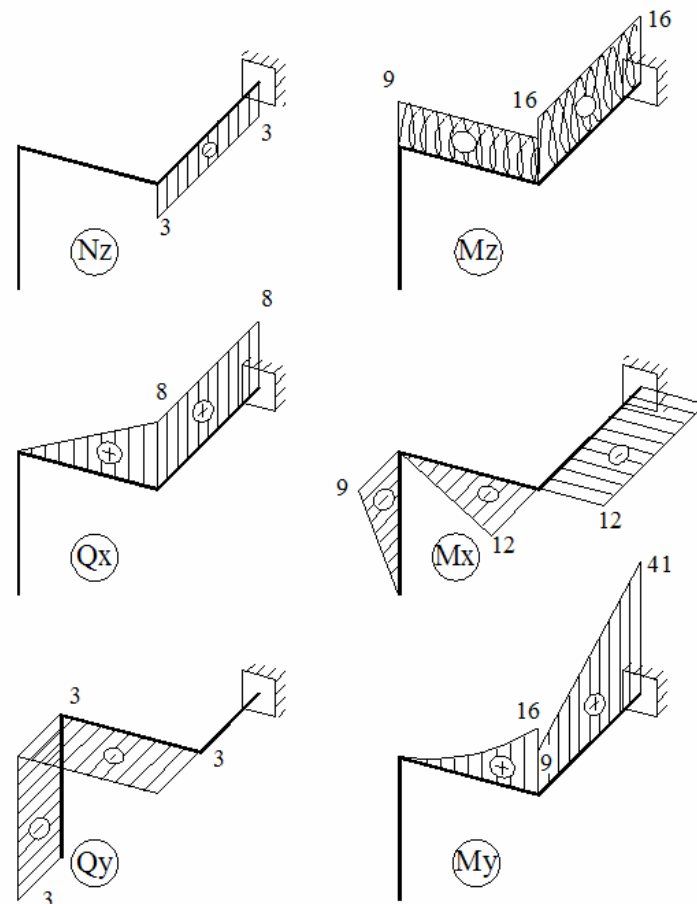
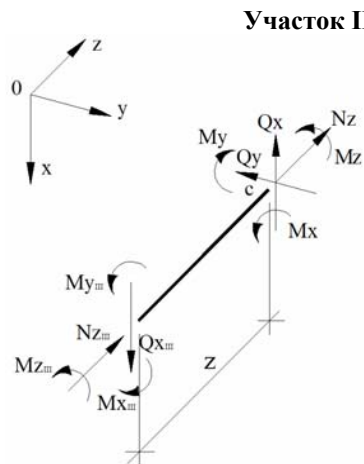


Рис. 38



Участок III $0 \leq z < 4\text{м}$ (рис. 37)

$$\sum Z = 0$$

$$N_{Z\text{III}} + N_Z = 0$$

$$N_Z = -N_{Z\text{III}}$$

$$N_Z = -3 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0 \quad Q_Y = 0$$

$$\sum X = 0$$

$$Q_{X\text{III}} - Q_X = 0$$

$$Q_{X\text{III}} = Q_X; \quad Q_X = 8 \text{ кН}$$

$$\sum M_{ZC} = 0$$

$$M_Z + M_{Z\text{III}} = 0$$

$$M_Z = -M_{Z\text{III}}$$

$$M_Z = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\sum M_{XC} = 0$$

$$M_{X\text{III}} - M_X = 0$$

$$M_{X\text{III}} = M_X$$

$$M_X = -12 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\sum M_{YC} = 0$$

$$-M_{Y\text{III}} - Q_{X\text{III}} \cdot z + M_Y = 0$$

$$M_Y = M_{Y\text{III}} + Q_{X\text{III}} \cdot z$$

$$z=0; \quad M_Y = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$z=4\text{м}; \quad M_Y = 9 + 8 \cdot 4 = 41 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

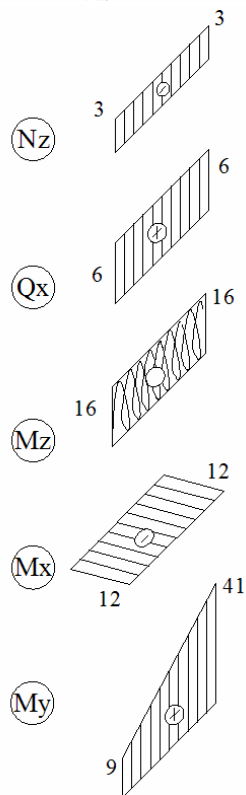


Рис. 37

Виды опор и возникающих в них опорных реакций



Рис. 4

Виды узлов (соединений)

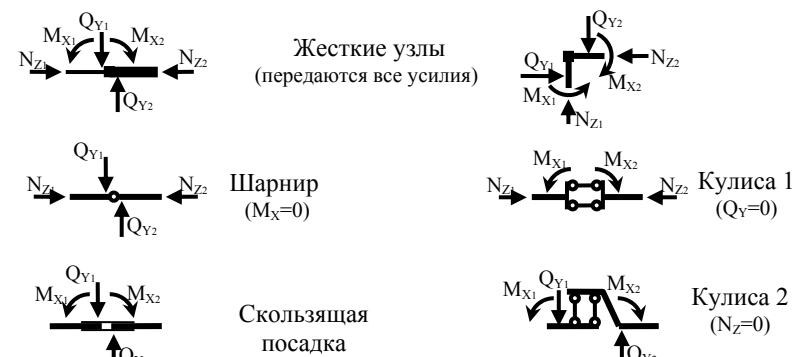


Рис. 5

Правила знаков для внешних сил



Рис. 6

Правила знаков для внутренних усилий

— отличаются от правила знаков для внешних сил, т.к. должны давать одинаковые знаки для внутренних усилий, приложенных к левой и правой частям стержня, мысленно разделенного методом сечений (рис.8).

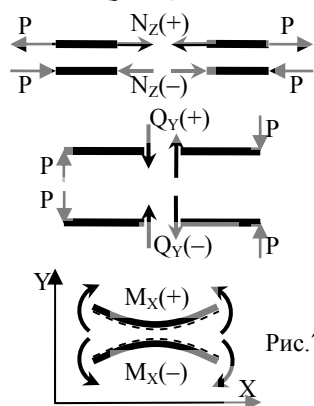


Рис.7

Нормальная сила N_z положительна, если она растягивает рассматриваемую часть (направлена от сечения).

Поперечная сила Q_y положительна, если она вращает рассматриваемую часть по часовой стрелке.

Изгибающий момент M_x положителен, если кривизна рассматриваемой части противоположна направлению оси Y (пунктиром обозначено положение растянутых волокон).

Построение эпюр внутренних усилий в стержневых системах

Эпюра — график изменения внутреннего усилия по длине стержня. Эпюры позволяют быстро и наглядно определять наиболее нагруженные точки (сечения), которые должны подвергаться расчету.

Участок — часть стержня, в пределах которой не происходит скачкообразного изменения внешних нагрузок или геометрии сечения. Границами участков являются узлы — точки размещения опор, приложения сосредоточенных нагрузок, места сопряжений с другими стержнями.

Плоская задача — все внешние и внутренние силы действуют в одной плоскости, число неизвестных внутренних усилий — 3 (N_z , Q_y , M_x).

Универсальные уравнения внутренних усилий на участке.

Рассмотрим балку, состоящую из 1-го участка длиной l . Разрежем балку на расстоянии z от левого края, отбросим правую часть, заменим ее действие искомыми внутренними усилиями N_z , Q_y , M_x , и рассмотрим равновесие левой части.

II участок $0 \leq z < 3$ м (рис. 35)

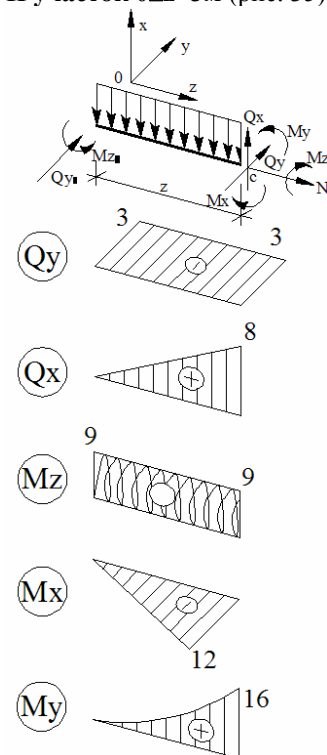
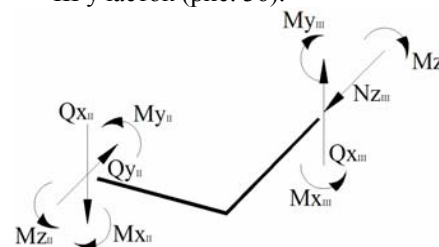


Рис. 35

Определение начальных значений внутренних усилий при переходе на III участок (рис. 36).



$$\begin{aligned} \sum Z=0 \quad N_z &= 0 \\ \sum Y=0 \quad Q_y &= Q_{yII} \quad Q_y = -3 \text{ кН} \\ \sum X=0 \quad Q_x &= q \cdot z \\ z=0; Q_x &= 0 \\ z=4 \text{ м}; Q_x &= 8 \text{ кН} \\ \sum M_{zc}=0 \quad M_z &= M_{zII} \\ M_z &= 9 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ \sum M_{xc}=0 \quad M_x &= Q_{yII} \cdot z \\ Q_{yII} &= -P \\ z=0; M_x &= 0 \\ z=4 \text{ м}; M_x &= -3 \cdot 4 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ \sum M_{yc}=0 \quad M_y &= \frac{q \cdot z^2}{2} \\ z=0; M_y &= 0 \\ z=4 \text{ м}; M_y &= -16 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

Рис. 36

1. Особенность данной задачи состоит в том, что эпюры носят пространственный характер, поэтому для ясности желательно, чтобы система координат при переходе с участка на участок (рис. 32, б) претерпевала минимум изменений: ось Z всегда направлена вдоль стержня, одна из двух оставшихся осей X и Y должна сохранить прежнее направление.
2. Эпюры изгибающих моментов M_x , M_y и поперечных сил Q_x , Q_y должны строиться в плоскости их действия.

I участок $0 \leq z < 3\text{ м}$ (рис. 33)

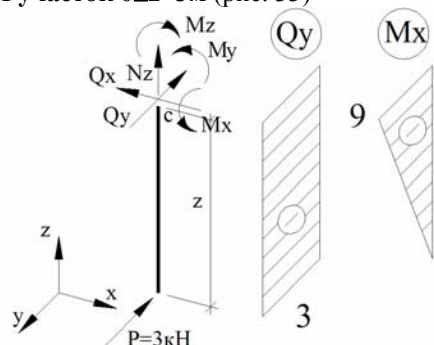


Рис. 33

$$\begin{aligned}\sum Z &= 0 & N_z &= 0 \\ \sum X &= 0 & Q_x &= 0 \\ \sum Y &= 0 & Q_y &= -P \\ Q_y &= -3 \text{ кН} \\ \sum M_{zc} &= 0 & M_z &= 0 \\ \sum M_{yc} &= 0 & M_y &= 0 \\ \sum M_{xc} &= 0 & M_x &= -P \cdot z \\ z &= 0; & M_x &= 0 \\ z &= 3\text{ м}; & M_x &= -3 \cdot 3 = -9 \text{ кН} \cdot \text{м}\end{aligned}$$

Определение начальных значений внутренних усилий при переходе на II участок (рис. 34).

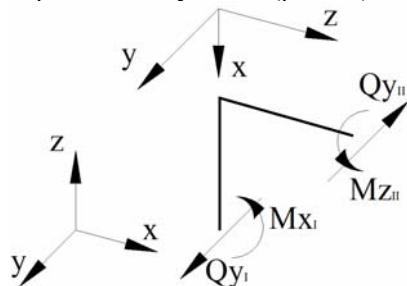


Рис. 34

$$\begin{aligned}Q_{yI} - Q_{yII} &= 0 \\ Q_{yI} &= Q_{yII} = -3 \text{ кН} \\ -M_{xI} + M_{zII} &= 0 \\ M_{xI} &= M_{zII} = -9 \text{ кН} \cdot \text{м}\end{aligned}$$

Обратите внимание, что для осей X и Z, взаимно меняющих положение, произошел переход изгибающего момента M_{xI} в крутящий момент M_{zII} .

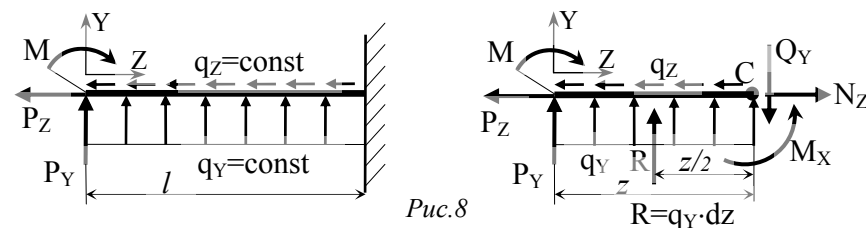


Рис. 8

$$\begin{aligned}1. \quad \sum Z &= 0; & -P_Z - q_z \cdot z + N_z &= 0; \\ & N_z &= P_Z + q_z \cdot z & (2) \\ 2. \quad \sum Y &= 0; & -P_Y - q_y \cdot z + Q_y &= 0; \\ & Q_y &= P_Y + q_y \cdot z & (3) \\ 3. \quad \sum M_c &= 0; & -M - P_Y \cdot z - q_y \cdot z \cdot \frac{z}{2} + M_x &= 0; \\ & M_x &= M + P_Y \cdot z + \frac{q_y \cdot z^2}{2} & (4)\end{aligned}$$

Выражения (2-4) являются универсальными уравнениями внутренних усилий на участке, поскольку они содержат все возможные сочетания нагрузок в стержневых системах (кроме распределенных по закону нагрузок). Для построения эпюр нужно подставить в данные уравнения приложенные нагрузки и координаты z характерных точек участка.

Если балка состоит из нескольких участков, то в сосредоточенные нагрузки на левом краю каждого последующего участка входят приложенные там внешние силы и моменты, включая опорные реакции, и вычисленные внутренние усилия с правого края предыдущего участка.

Сосредоточенные нагрузки на правом краю текущего участка не входят в уравнения (2-4), т.к. они относятся к следующему участку или обеспечивают условия равновесия на правом краю последнего участка.

Внешние нагрузки и внутренние усилия с предыдущих участков подставляются в уравнения (2-4) со знаками в соответствии с правилами знаков для внешних сил (рис.6)

Пример 1. Для балки на 2-х опорах по приведенной схеме (рис. 9, а) построить эпюры внутренних силовых факторов

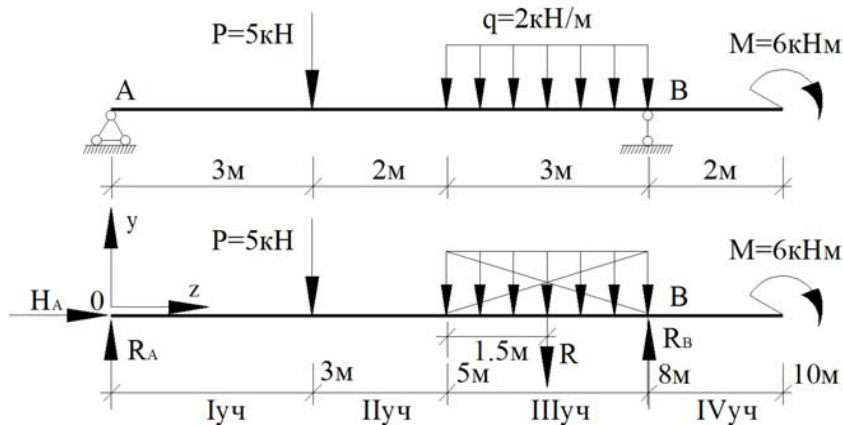


Рис. 9

1. Определение опорных реакций

Отбросим опорные связи и заменим их соответствующими реакциями H_A , R_A , R_B (рис. 14,б). Составим уравнение моментов всех сил, действующих на балку относительно точки А. Равномерно распределенную нагрузку q заменим ее равнодействующей R .

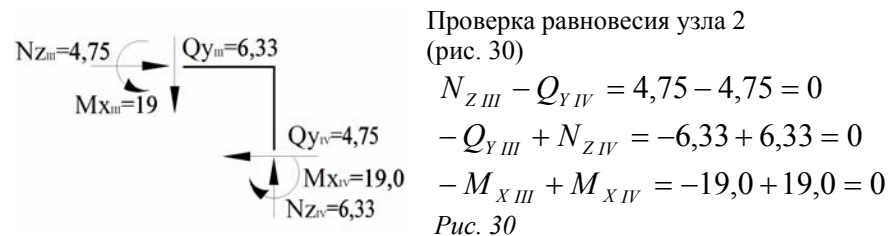
$$\begin{aligned}\sum M_A = 0 \quad & -R_B \cdot 8 + P \cdot 3 + R \cdot 6,5 + M = 0 \\ & -R_B \cdot 8 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 6,5 + 6 = 0 \\ & R_B = 7,5 \text{ кН}\end{aligned}$$

Второе уравнение для определения R_A составим относительно точки В

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0 \quad & R_A \cdot 8 - P \cdot 5 - R \cdot 1,5 + 6 = 0 \\ & R_A \cdot 8 - 5 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 6 = 0 \\ & R_A = 3,5 \text{ кН}\end{aligned}$$

Для определения горизонтальной реакции H_A необходимо использовать уравнение проекций всех сил на ось Z.

$\sum Z = 0$, т.к. проекции всех сил на эту ось равны 0, то $H_A = 0$.



Окончательные эпюры внутренних усилий (рис. 31)

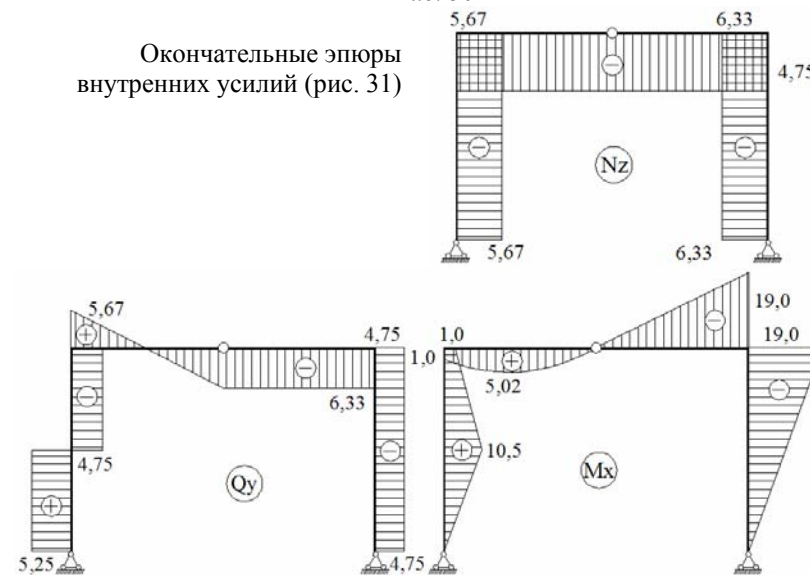


Рис. 31

Пример 5. Для пространственного консольного бруса по приведенной схеме (рис. 32, а) построить эпюры внутренних усилий.

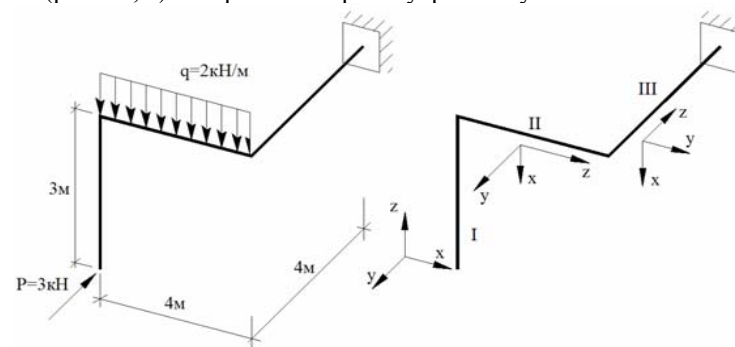


Рис. 32

IV участок $0m \leq z < 3m$ (рис. 28)

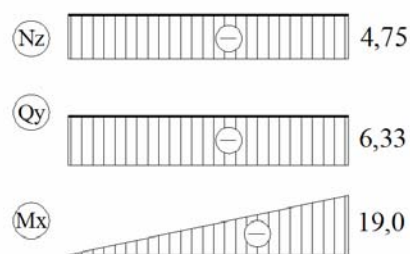
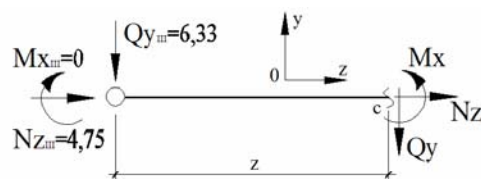


Рис. 28

$$z=0m \Rightarrow M_x = 0 + 6,33 \cdot 0 = 0;$$

$$z=3m \Rightarrow M_x = 0 + 6,33 \cdot 3 = -19,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

V участок $0 \leq z \leq 4m$ (рис. 29)

Для сокращения числа членов уравнения рассмотрим равновесие нижней части от сечения.

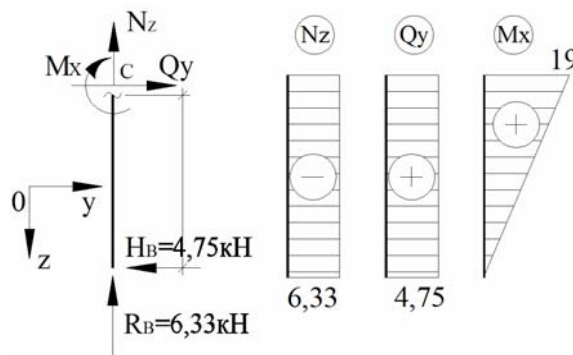


Рис. 29

$$M_x = -H_B \cdot (z - 4)$$

$$z=0 \Rightarrow M_x = -4,75 \cdot 4 = -19,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$z=4m \Rightarrow M_x = 0$$

$$\sum Z=0$$

$$N_z + N_{zIII} = 0;$$

$$N_z = -N_{zIII};$$

$$N_z = -4,75 \text{ кН}.$$

$$\sum Y=0$$

$$-Q_y - Q_{yIII} = 0;$$

$$Q_y = -Q_{yIII};$$

$$Q_y = -6,33 \text{ кН}.$$

$$\sum Mc=0$$

$$-M_x + M_{xIII} + Q_{yIII} \cdot z = 0$$

$$M_x = M_{xIII} + Q_{yIII} \cdot z;$$

2. Разобьем балку на участки, в пределах которых нагрузка или геометрия балки не меняется скачкообразно (рис. 14,б). Таких участков – 4.

3-5. Запись уравнений внутренних усилий по участкам, вычисление внутри

нных усилий в характерных точках и построение эпюр.

I участок $0 \leq z \leq 3m$ (рис. 10)

Разрежем мысленно балку на 2 части в пределах I участка на расстоянии Z от левой опоры, отбросим правую часть балки и рассмотрим равновесие левой части. Действие отброшенной части заменим системой сил Nz, Qy, Mx. Выберем направления этих сил, соответствующих положительным значениям внутренних усилий, и запишем для участка уравнения (2-4):

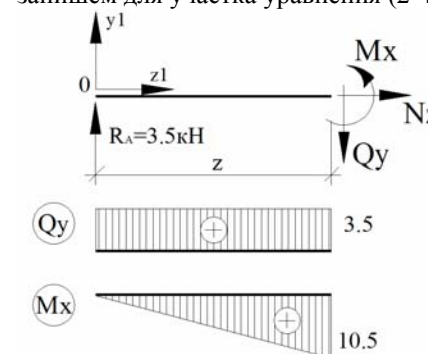


Рис. 10

$$N_z = P_z + q_z \cdot z \quad (2)$$

$$N_z \equiv 0$$

нормальная сила

$$Q_y = P_y + q_y \cdot z \quad (3)$$

$$Q_y = R_A$$

поперечная сила

т.к. Qy не зависит от z, то в любой точке участка

$$Q_y = R_A = 3,5 \text{ кН}$$

$$M_x = M + P_z \cdot z + \frac{q_z \cdot z^2}{2} \quad (4)$$

$$M_x = R_A \cdot z - \text{уравнение изгибающего момента}$$

Уравнение момента линейно на участке, для построения эпюры достаточно подставить координаты границ участка.

$$z=0 \Rightarrow M_x=0$$

$$z=3 \Rightarrow M_x = 3,5 \cdot 3 = 10,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

II участок $0 \leq z \leq 2 \text{ м}$ (рис. 11)

Ввиду тождественности равенства 0 на всех участках N_z , здесь и далее уравнение не записывается.

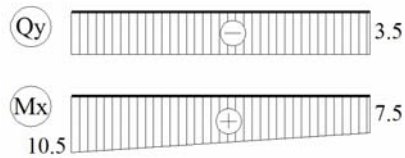
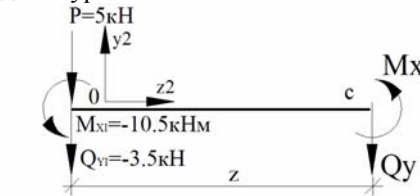


Рис. 11

$$Q_Y = P_Y + q_Y \cdot z$$

$$Q_Y = -P - Q_{Y1};$$

$$Q_Y = \text{const} = -5 + 3,5 = -1,5 \text{ кН};$$

$$M_X = M + P_Z \cdot z + \frac{q_Z \cdot z^2}{2}$$

$$M_X = -M_{X1} + z \cdot (-P - Q_{Y1})$$

$$M_X = -10,5 - 1,5 \cdot z;$$

$$z = 0 \text{ м} \Rightarrow M_X = 10,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z = 2 \text{ м} \Rightarrow M_X = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

III участок $0 \leq z < 3 \text{ м}$ (рис. 12)

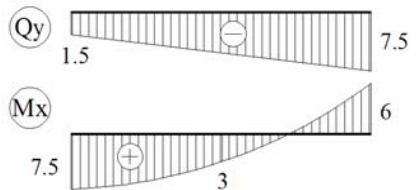
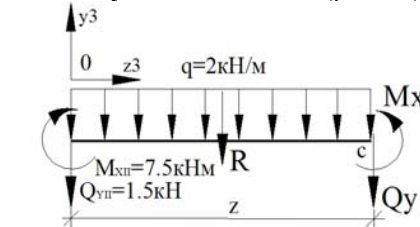


Рис. 12

$$Q_Y = P_Y + q_Y \cdot z$$

$$Q_Y = -Q_{Y11} - q \cdot z;$$

$$Q_Y = -1,5 - 2 \cdot z;$$

$$z = 0 \text{ м} \Rightarrow Q_Y = -1,5 \text{ кН};$$

$$z = 3 \text{ м} \Rightarrow Q_Y = -1,5 - 2 \cdot 3 = -7,5 \text{ кН}$$

$$M_X = M + P_Z \cdot z + \frac{q_Z \cdot z^2}{2};$$

$$M_X = M_{X11} - z \cdot Q_Y - \frac{q \cdot z^2}{2};$$

$$M_X = 7,5 - 1,5 \cdot z - z^2$$

III участок $0 \leq z < 3 \text{ м}$ (см. рис. 27)

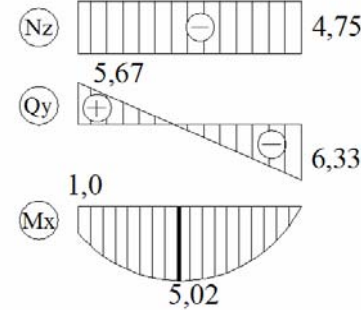
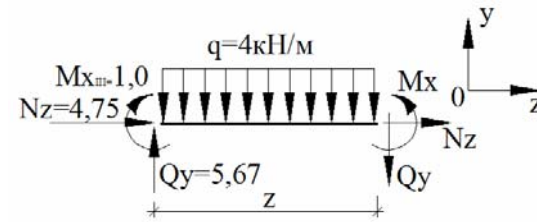


Рис. 27

$$\sum Z = 0$$

$$N_z + N_{Z111} = 0$$

$$N_z = -N_{Z111}$$

$$N_z = -4,75 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0$$

$$-Q_Y + Q_{Y111} - q \cdot z = 0$$

$$Q_Y = Q_{Y111} - q \cdot z$$

$$z = 0; Q_Y = 5,57 \text{ кН}$$

$$z = 3 \text{ м};$$

$$Q_Y = 5,67 - 4 \cdot 3 = -6,33 \text{ кН}$$

$$Q_Y = 0;$$

$$Q_{Y111} - q \cdot z_0 = 0$$

$$z_0 = \frac{Q_{Y111}}{q} = \frac{5,67}{4} \approx 1,42$$

$$\sum M_c = 0$$

$$-M_X + M_{X111} + Q_{Y111} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} = 0$$

$$M_X = M_{X111} + Q_{Y111} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2}$$

$$z = 0; M_X = M_{X111} = 1,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$z = z_0 = 1,42 \text{ м}; M_X = 1,0 + 5,67 \cdot 1,42 - \frac{4 \cdot 1,42^2}{2} = 5,02 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$z = 3 \text{ м}; M_X = 1,0 + 5,67 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 3^2}{2} = 0$$

II участок $2\text{ м} \leq z < 4\text{ м}$ (рис. 25)

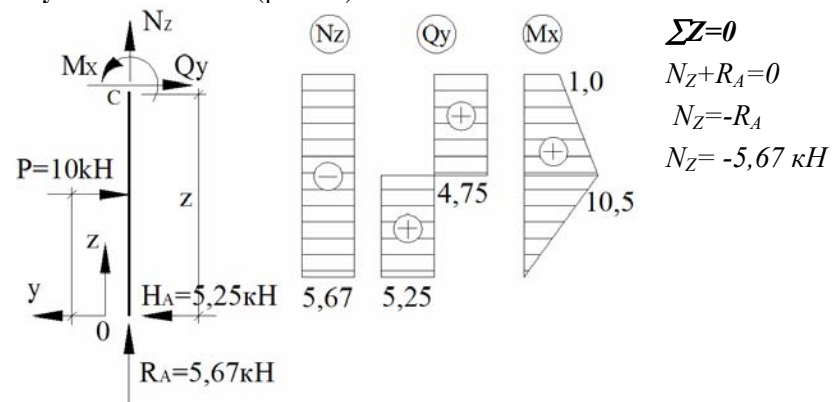


Рис. 25

$$\sum Y=0$$

$$-Q_Y - P + H_A = 0$$

$$Q_Y = H_A - P$$

$$Q_Y = 5,25 - 10 = -4,75 \text{ кН}$$

$$\sum M_C=0$$

$$-M_X - P \cdot (z - 2) + H_A \cdot z = 0$$

$$M_X = H_A \cdot z - P(z - 2)$$

$$z = 2\text{ м}; \quad M_X = 10,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$z = 4\text{ м}; \quad M_X = 5,25 \cdot 4 - 10 \cdot 2 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При переходе на III участок необходимо определить начальные значения внутренних усилий этого участка методом “вырезания” узла I (рис. 26).

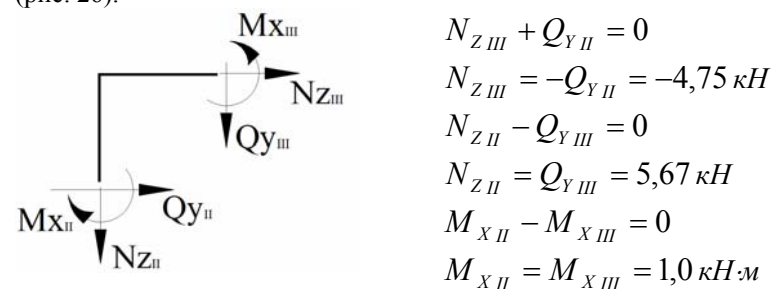


Рис. 26

Уравнение изгибающего момента на участке является уравнением 2-го порядка, поэтому для построения эпюры необходимо подставить несколько значений координаты.

$$z = 0\text{ м} \Rightarrow M_X = -1,5 \cdot 0 - 0 + 7,5 = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$z = 1,5\text{ м} \Rightarrow M_X = -1,5 \cdot 1,5 - 1,5^2 + 7,5 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$z = 3\text{ м} \Rightarrow M_X = -1,5 \cdot 3 - 3^2 + 7,5 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

IV участок $0\text{ м} \leq z \leq 2\text{ м}$ (рис. 13)

На IV участке целесообразно отбросить новую часть балки и рассмотреть равновесие правой части.

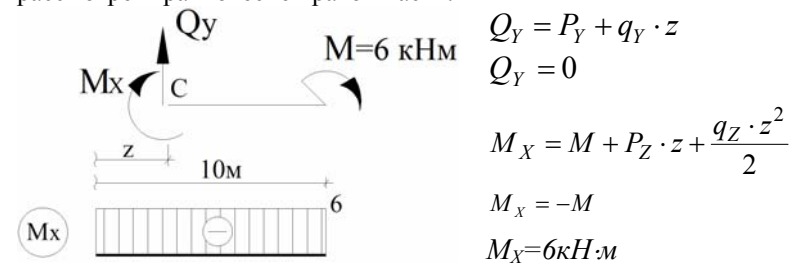


Рис. 13

Окончательные эпюры внутренних усилий (рис. 14)

Обратите внимание на следующий факт: в конце III-го участка поперечная сила $Q_Y = -7,5 \text{ кН}$, а на IV участке $Q_Y = 0$. Это произошло за счет опорной реакции $R_B = 7,5 \text{ кН}$, которая вошла в уравнение III-го участка при входе на IV участок.

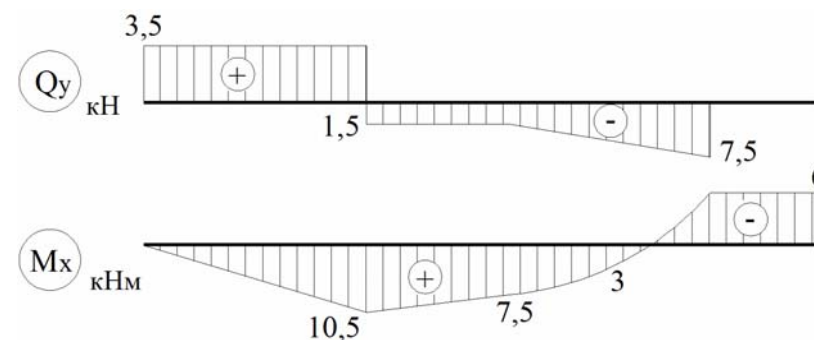


Рис. 14

Пример 2. Для консольной Г-образной балки по приведенной схеме (рис. 15, а) построить эпюры внутренних силовых факторов.

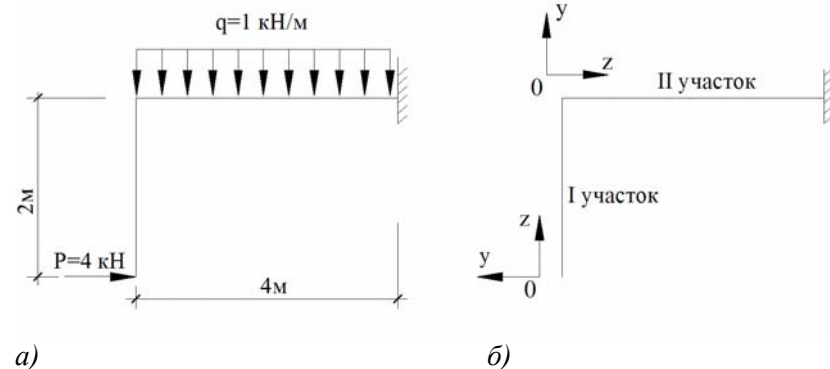


Рис. 15

Особенности решения данной задачи:

- схема является консольной, поэтому можно обойтись без определения опорных реакций, начав запись уравнений со свободного края;

- контур балки ломаный, состоящий из двух участков, поэтому целесообразно на каждом участке использовать свою систему координат с началом координат в начале участка (рис. 20, б).

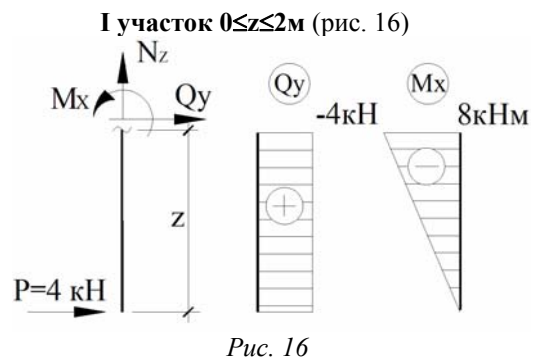


Рис. 16

$$\begin{aligned} \sum Z=0 \quad N_z &= 0 \\ \sum Y=0 \quad -P - Q_y &= 0 \\ Q_y &= -P \\ Q_y &= -4 \text{ кН} \\ \sum M_c=0 \\ -P \cdot z - M_x &= 0 \\ M_x &= -P \cdot z \\ z=0; \quad M_x &= 0 \\ z=2 \text{ м}; \quad M_x &= -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0; \quad P \cdot 2 - q \cdot 3 \cdot 4,5 + R_B \cdot 6 = 0; \\ R_A &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 4,5 - 10 \cdot 2}{6} = 5,67 \text{ кН} \\ \sum M_C^{лев} &= 0; \quad R_A \cdot 3 - P \cdot 2 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - H_A \cdot 4 = 0; \\ H_A &= \frac{5,67 \cdot 3 - 10 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5}{4} = -5,25 \text{ кН} \\ \sum M_C^{np} &= 0; \quad -R_B \cdot 3 - H_B \cdot 4 = 0; \\ R_B &= -\frac{6,33 \cdot 3}{4} = -4,75 \text{ кН} \end{aligned}$$

2. Отбросим опорные связи и вместо них приложим найденные опорные реакции в нужном направлении (рис. 23, б).

3. Схема должна быть разбита на 5 участков (см. рис. 23, б), причем систему координат удобно изменить 2 раза: при переходе на III и V участки.

4. Запись уравнений внутренних усилий по участкам.

I участок $0 \leq z < 2 \text{ м}$ (рис. 24)

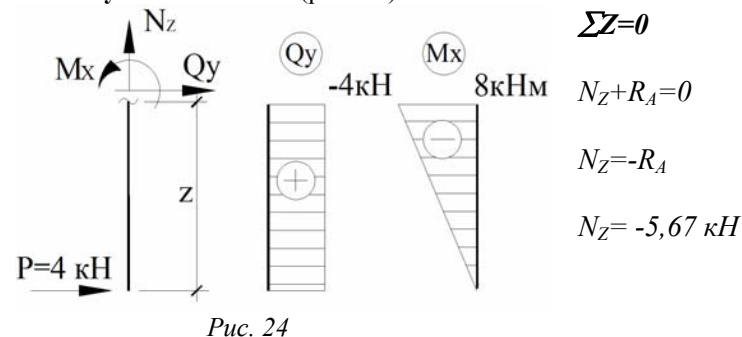


Рис. 24

$$\begin{aligned} \sum Y=0 \\ -Q_y + H_A &= 0 \\ Q_y &= H_A \\ Q_y &= 5,25 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_c=0 \\ -M_x + H_A \cdot z &= 0 \\ M_x &= H_A \cdot z \\ z=0; \quad M_x &= 0 \\ z=2 \text{ м}; \quad M_x &= 5,25 \cdot 2 = -10,5 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

Эпюры внутренних усилий (рис. 22)

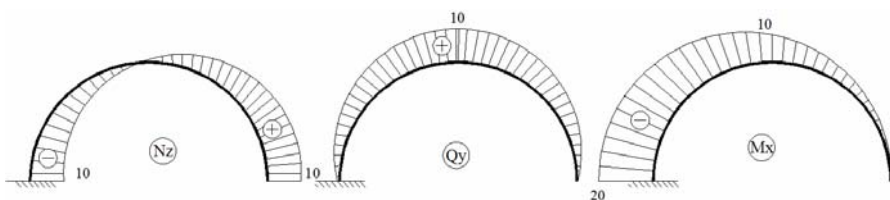
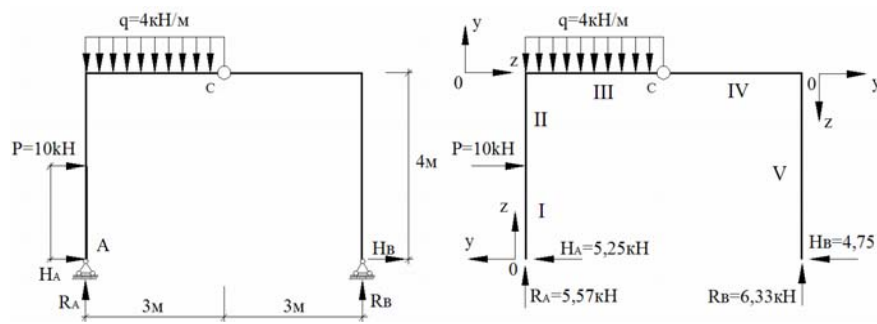


Рис. 22

Пример 4. Для 3-х шарнирной рамы по приведенной схеме (рис. 23, а) построить эпюры внутренних усилий.



а).

б).

Рис. 23

1. Определение опорных реакций

Особенность данной задачи заключается в том, что будучи статически определимой в ней для 4-х неизвестных опорных реакций R_A , H_A , R_B , H_B имеет 3 общих уравнения равновесия. 4-е недостающее уравнение равновесия может быть получено, если применить метод сечений в шарнире С и составить уравнение моментов относительно точки С для любой части рамы.

$$\sum M_A = 0; \quad P \cdot 2 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - R_B \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = \frac{10 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5}{6} = 6,33 \text{ кН}$$

Поскольку при переходе с I-го на II участок меняется система координат, то это необходимо при записи уравнений II-го участка.

Для этой цели используется прием, называемый методом "вырезания узла", зона перехода I-го участка во II-й, называемая узлом дважды "вырезается" методом сечений со стороны каждого из участков на расстоянии бесконечно малом от узла (рис. 17). Для обеспечения равновесия "вырезанного узла" с каждой стороны прикладывается система сил, соответствующая внутренним усилиям участков S_I и S_{II} , которые должны удовлетворять условиям равновесия:

$$\begin{aligned} S_I + S_{II} &= 0 \\ -Q_{Y_I} + N_{Z_{II}} &= 0 \\ Q_{Y_I} &= N_{Z_{II}} \\ -N_{Z_I} - Q_{Y_{II}} &= 0 \\ -N_{Z_I} &= Q_{Y_{II}} \\ M_{X_I} - M_{X_{II}} &= 0 \\ M_{X_I} &= M_{X_{II}} \end{aligned}$$

Рис. 17

Полученные таким образом начальные значения внутренних усилий необходимо добавить в уравнения II участка.

Замечания: если к узлу приложены сосредоточенные нагрузки, то они должны войти в уравнения равновесия узла.

II участок $0 \leq z < 6\text{м}$ (рис. 18)

Начальные значения внутренних усилий:

$$\begin{aligned} Q_{Y_I} &= N_{Z_{II}} = -4 \text{ кН}; \\ -N_{Z_I} &= Q_{Y_{II}} = 0; \\ M_{X_I} &= M_{X_{II}} = -8 \text{ кНм}; \\ \sum Z &= 0 \\ 4 + N_Z &= 0 \\ N_Z &= -4 \text{ кН} \end{aligned}$$

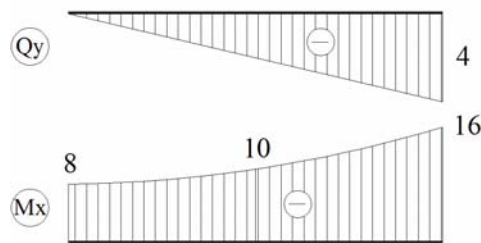


Рис. 18

$$\sum Y = 0$$

$$-q \cdot Z - Q_Y = 0 \quad Q_Y = -q \cdot z$$

$$z = 0; Q_Y = 0$$

$$z = 4 \text{ м}; Q_Y = -1 \cdot 4 = -4 \text{ кН}$$

$$\sum M_c = 0$$

$$-8 - \frac{q \cdot z^2}{2} - M_x = 0$$

$$M_x = -8 - \frac{q \cdot z^2}{2}$$

$$z = 0 \text{ м}; M_x = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$z = 2 \text{ м}; M_x = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$z = 4 \text{ м}; M_x = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Окончательные эпюры внутренних усилий (рис. 19)

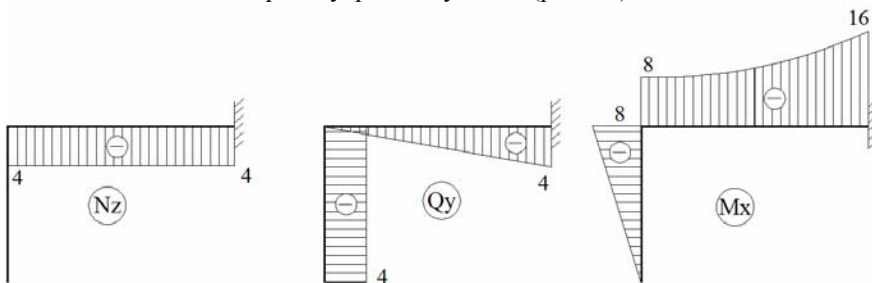
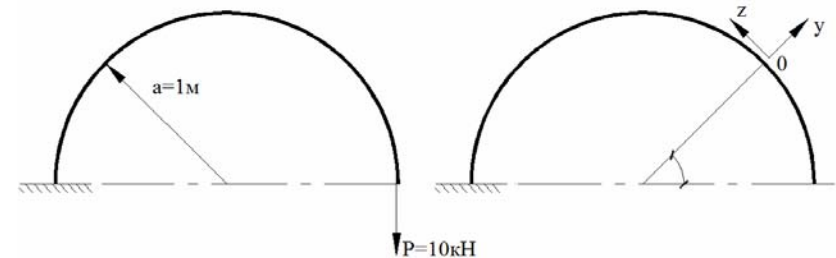


Рис. 19

Примечание: Опорные реакции в заделке равны соответствующим внутренним усилиям с противоположным знаком.

Пример 3. Для консольной арки по приведенной схеме (рис. 20,а) построить эпюры внутренних усилий.



а)

б)

Рис. 20

Особенность решения данной задачи заключается в том, что удобно систему координат ZOY перемещать по окружности дуги арки, выражая значения внутренних усилий в зависимости от угла поворота α (рис. 20, б).

Схема состоит из одного криволинейного участка $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Применим метод сечений в произвольной точке дуги и рассмотрим равновесие правой части (рис. 21).

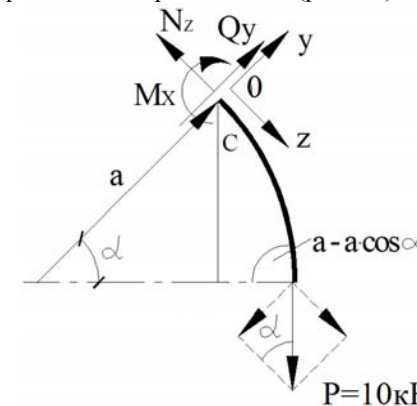


Рис. 21

$$\sum Z = 0$$

$$N_Z \cdot P \cdot \cos \alpha = 0 \quad N_Z = P \cdot \cos \alpha$$

$$\alpha = 0 \quad N_Z = P = 10 \text{ кН}$$

$$\alpha = 90^\circ \quad N_Z = 0$$

$$\alpha = 180^\circ \quad N_Z = -P = -10 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0$$

$$Q_Y \cdot P \cdot \sin \alpha = 0 \quad Q_Y = P \cdot \sin \alpha$$

$$\alpha = 0 \quad Q_Y = 0$$

$$\alpha = 90^\circ \quad Q_Y = P = 10 \text{ кН}$$

$$\alpha = 180^\circ \quad Q_Y = 0$$

$$\sum M_c = 0 \quad M_x + P(a - a \cdot \cos \alpha) = 0$$

$$M_x = P \cdot a(\cos \alpha - 1) = 0$$

$$\alpha = 0 \quad M_x = 0$$

$$\alpha = 90^\circ \quad M_x = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\alpha = 180^\circ \quad M_x = -10 \cdot 1 \cdot 2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$